Mécanique analytique, Corrigé 3

Assistants et tuteurs :

jeanne.bourgeois@epfl.ch
luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch
nathan.brunet@epfl.ch
lorenzo.fioroni@epfl.ch
filippo.ferrari@epfl.ch
jonas.daverio@epfl.ch
leo.goutte@epfl.ch
mathias.findrihan@epfl.ch
remi.thomas@epfl.ch

Exercice 1 : Particule chargée avec ressort radial et champ magnétique uniforme

Données et rappels. Champ $\mathbf{B} = B\,\hat{\mathbf{z}}$, mouvement contraint au plan $z = 0$, coordonnées cylindriques (r, θ). Jauge symétrique dans le plan : $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\,\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ d'où $\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} B r^2 \dot{\theta}$. Potentiel généralisé (Lorentz) : $U = -q\,\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{qB}{2} r^2 \dot{\theta}$. Potentiel élastique : $V_{\text{ressort}} = \frac{1}{2} k (r - r_0)^2$. Énergie cinétique planare : $T = \frac{m}{2}\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\big)$. On note $\omega_c \equiv qB/m$ et $\alpha \equiv \frac{qB}{2}$.

1. Construction du lagrangien.

(a) $T = \dfrac{m}{2}\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\big)$.

(b) Par définition $L = T - V_{\text{ressort}} - U$, donc

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\big) + \frac{qB}{2}\, r^2 \dot{\theta} - \frac{k}{2}(r - r_0)^2.$$

2. Quantité conjuguée et constante du mouvement.

(a) θ est cyclique (elle n'apparait pas dans le lagrangien), donc son moment conjugué

$$\ell \;\equiv\; \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} + \frac{qB}{2}\, r^2$$

est conservé.

(b) On isole $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \frac{\ell - \alpha r^2}{m r^2} = \frac{\ell}{m r^2} - \frac{\omega_c}{2}.$$

3. Réduction radiale effective.

(a) L'équation de Lagrange sur la coordonnée radiale donne :

$$m\ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 + k(r - r_0) - qBr\dot{\theta} = 0.$$

En remplaçant $\dot{\theta}$ par l'expression ci-dessus, cette équation du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{r} + k(r - r_0) + \frac{\alpha^2}{m} r - \frac{\ell^2}{m r^3} = 0.$$

Après une multiplication par $\dot{r}$, intégrer dans le temps cette équation donne une dynamique effective à une dimension, régie par l'équation :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^{\,2} + V_{\text{eff}}(r;\ell) = E_{\text{red}}.$$

(b) A une constante près, le potentiel effectif s'écrit :

$$V_{\text{eff}}(r;\ell) = \frac{k}{2}(r-r_0)^2 + \frac{(\ell-\alpha r^2)^2}{2mr^2}.$$

(c) Dérivée radiale (on peut développer ou dériver directement) :

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = k(r-r_0) \ + \ \frac{q^2B^2}{4m}r \ - \ \frac{\ell^2}{mr^3}.$$

La condition d'équilibre $dV_{\text{eff}}/dr|_{r_*} = 0$ équivaut à

$$\Big(k + \frac{m\omega_c^2}{4}\Big)r_* \ - \ \frac{\ell^2}{mr_*^3} \ - \ kr_0 = 0.$$

4. Solutions circulaires et position du minimum.

(a) Cherchons les points d'annulation de $f_\ell(r) = \dfrac{dV_{\text{eff}}}{dr} = k(r-r_0) + \dfrac{m\omega_c^2}{4}r - \dfrac{\ell^2}{mr^3}$. Sa dérivée vérifie $f_\ell'(r) = k + \frac{m\omega_c^2}{4} + \frac{3\ell^2}{mr^4} \ > \ 0$ pour $r>0$, de telle sorte que f_ℓ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Sachant que $f_\ell(r) \to -\infty$ pour $r \to 0^+$ et $f_\ell(r) \to +\infty$ pour $r \to +\infty$, l'équation $f_\ell(r) = 0$ admet une unique solution $r_*(l) > 0$. Il s'agit du minimum de $V_{\text{eff}}(r;\ell)$ à ℓ fixé.

(b) En imposant $r_* = r_0$ dans l'équilibre, on obtient $\dfrac{\ell^2}{mr_0^3} = \dfrac{m\omega_c^2}{4}r_0$, soit

$$\ell = \alpha r_0^2 = \frac{qB}{2}r_0^2.$$

Alors la coordonnée angulaire vérifie $\dot{\theta}_* = \dfrac{\ell}{mr_0^2} - \dfrac{\omega_c}{2} = 0$: à la position d'équilibre r_0, les forces sur la particule s'annulent et la particule peut rester immobile.

(c) La fonction $\ell \to f_\ell(r)$ est décroissante pour $r>0$ fixé. Si $|\ell| > |\alpha| r_0^2$, l'équilibre se déplace donc vers $r_* > r_0$ (effet centrifugo-magnétique plus fort) ; si $|\ell| < |\alpha| r_0^2$, l'équilibre vérifie $r_* < r_0$. Sachant que

$$\frac{\ell^2}{mr^4} = m(\dot{\theta} + \frac{\omega_c}{2})^2,$$

à la condition d'équilibre radial $r = r_*$, la coordonnée angulaire satisfait :

$$m(\dot{\theta} + \frac{\omega_c}{2})^2 = k(1 - \frac{r_0}{r_*}) + \frac{m\omega_c^2}{4}.$$

En rayon d'équilibre r_*, la particule décrit donc un mouvement circulaire uniforme, dans le sens trigonométrique pour $|\ell| > |\alpha| r_0^2$ et anti-trigonométrique pour $|\ell| < |\alpha| r_0^2$.

5. Petites oscillations radiales. On suppose $r(t) = r_* + \rho(t)$ avec $|\rho| \ll r_*$.

(a) La coordonnée radiale est régie par l'équation du mouvement : $m\ddot{r} = -V'_{\text{eff}}(r)$. En développant autour de r_* (où $V'_{\text{eff}}(r_*) = 0$),

$$m\ddot{\rho} \; + \; \left.\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}\right|_{r_*} \rho \; + \; o(\rho) = 0.$$

(b) À l'ordre linéaire (en négligeant $o(\rho)$),

$$m\ddot{\rho} + \left.\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}\right|_{r_*} \rho = 0.$$

Il s'agit de l'équation du mouvement d'un oscillateur de pulsation

$$\omega_r^2 = \frac{1}{m} \left.\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}\right|_{r_*}.$$

(c) De $f'_\ell(r) = k + \dfrac{m\omega_c^2}{4} + \dfrac{3\ell^2}{mr^4}$, on lit

$$\left.\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}\right|_{r_*} = k + \frac{m\omega_c^2}{4} + \frac{3\ell^2}{mr_*^4}.$$

Or $\ell = mr_*^2\big(\dot{\theta}_* + \frac{\omega_c}{2}\big)$, donc

$$\frac{\ell^2}{mr_*^4} = m\Big(\dot{\theta}_* + \frac{\omega_c}{2}\Big)^2.$$

Finalement

$$\boxed{\omega_r^2 = \frac{k}{m} + \frac{\omega_c^2}{4} + 3\Big(\dot{\theta}_* + \frac{\omega_c}{2}\Big)^2.}$$

(d) Cohérence de l'approximation. La solution linéaire est $\rho(t) = A\cos(\omega_r t + \varphi)$; elle reste petite si

$$\frac{|A|}{r_*} \ll 1.$$

Énergies : l'excès d'énergie au-dessus du minimum vaut $\Delta E = \frac{1}{2}m\omega_r^2 A^2$, de sorte que si les conditions initiales satisfont $|\rho(0)| \ll r_*$ et $|\dot{\rho}(0)| \ll \omega_r r_*$, alors $A = \sqrt{\rho(0)^2 + \dot{\rho}(0)^2/\omega_r^2} \ll r_*$ et l'approximation linéaire se vérifie a posteriori.

6. Cas particulier $r_* = r_0$.

(a) Avec $\ell = \alpha r_0^2$ on a $\dot{\theta}_* = 0$ et

$$\omega_r^2 = \frac{k}{m} + \omega_c^2.$$

(b) Interprétation : la raideur effective radiale est la somme d'une contribution élastique (k) et d'une contribution magnétique ($m\omega_c^2$).

Remarques complémentaires.

— L'angle évolue selon $\dot\theta(t) = \dfrac{\ell}{mr(t)^2} - \dfrac{\omega_c}{2}$. Au premier ordre en ρ, cela induit une modulation lente de la vitesse angulaire et une précession apsidale du mouvement.

— Les deux régimes $r_* > r_0$ (ressort étiré) et $r_* < r_0$ (ressort comprimé) s'analysent avec les mêmes formules ; seul change le signe du terme de restauration $k(r_* - r_0)$ dans la balance radiale.

Exercice 2 : Déviation d'une bille de billard

1) Lagrangien effectif 2D. Avec $\mathbf{\Omega} = (0, \Omega_\oplus \cos\lambda, \Omega_\oplus \sin\lambda)$ et $\mathbf{r} = (x, y, 0)$,

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} = \big(-\Omega_\oplus \sin\lambda\, y,\ \Omega_\oplus \sin\lambda\, x,\ -\Omega_\oplus \cos\lambda\, x \big).$$

Le produit scalaire avec $\dot{\mathbf{r}} = (\dot x, \dot y, 0)$ donne

$$(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = \Omega_\oplus \sin\lambda\, (x\dot y - y\dot x) = \Omega_z\, (x\dot y - y\dot x).$$

Ainsi

$$U_{2D} = -m(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = -m\,\Omega_z\, (x\dot y - y\dot x),$$

et, comme $V = 0$ (plan horizontal, pas de frottement),

$$L = T - U_{2D} = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) + m\Omega_z (x\dot y - y\dot x).$$

2) Équations d'Euler–Lagrange. On calcule

$$\frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\dot x - m\Omega_z\, y, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = m\Omega_z\, \dot y, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot y} = m\dot y + m\Omega_z\, x, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -m\Omega_z\, \dot x.$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\Big(m\dot x - m\Omega_z y\Big) - m\Omega_z \dot y = 0 \ \Rightarrow\ m\ddot x - m\Omega_z \dot y - m\Omega_z \dot y = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\Big(m\dot y + m\Omega_z x\Big) + m\Omega_z \dot x = 0 \ \Rightarrow\ m\ddot y + m\Omega_z \dot x + m\Omega_z \dot x = 0.$$

En posant $v_x = \dot x$, $v_y = \dot y$:

$$\boxed{\dot v_x = 2\Omega_z v_y, \qquad \dot v_y = -2\Omega_z v_x}.$$

C'est la forme plane de la force de Coriolis $2m\,\dot{\mathbf{r}} \times (\Omega_z \hat{\mathbf{z}})$.

3) Solution et trajectoire. Le système linéaire se résout par rotation uniforme des vitesses :

$$v_x(t) = v_0 \sin(2\Omega_z t), \qquad v_y(t) = v_0 \cos(2\Omega_z t),$$

en imposant $v_x(0) = 0$, $v_y(0) = v_0$. Intégration avec $x(0) = y(0) = 0$:

$$x(t) = \int_0^t v_x\, dt' = \frac{v_0}{2\Omega_z}\Big(1 - \cos(2\Omega_z t)\Big), \qquad y(t) = \int_0^t v_y\, dt' = \frac{v_0}{2\Omega_z} \sin(2\Omega_z t).$$

La vitesse tourne à la pulsation $2\Omega_z$, la trajectoire est un arc de cercle débutant vers le nord et se courbant vers l'est (hémisphère nord, $\Omega_z > 0$).

4) Déviation latérale pour une portée L. Pour $|2\Omega_z t| \ll 1$:

$$\sin(2\Omega_z t) \simeq 2\Omega_z t, \quad \cos(2\Omega_z t) \simeq 1 - 2\Omega_z^2 t^2.$$

Donc

$$y(t) \simeq v_0 t, \qquad x(t) \simeq \frac{v_0}{2\Omega_z}\big(1 - (1 - 2\Omega_z^2 t^2)\big) = \Omega_z v_0 t^2.$$

Si la bille parcourt L vers le nord, $t \simeq L/v_0$, d'où

$$\boxed{\Delta x \simeq \Omega_z \frac{L^2}{v_0}}.$$

Signe : en hémisphère nord ($\Omega_z > 0$), $\Delta x > 0$ (déviation vers l'est, à droite du mouvement) ; en hémisphère sud, $\Delta x < 0$ (vers l'ouest).

5) Ordre de grandeur (optionnel). À $\lambda = 46°$: $\Omega_z = \Omega_\oplus \sin\lambda \approx 7.292 \times 10^{-5} \times 0.719 \approx 5.25 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$. Pour $L = 3\,\mathrm{m}$, $v_0 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$:

$$\Delta x \approx \frac{5.25 \times 10^{-5} \times 9}{2} \approx 2.36 \times 10^{-4}\,\mathrm{m} \approx 0.24\,\mathrm{mm}.$$

Effet réel mais très petit sur un billard : difficile à discerner face aux irrégularités et frottements.

Exercice 3 : Pendule avec pivot glissant

(a) Coordonnées :

$$\text{masse } m_1 : \quad x_1 = u, \quad \dot{x}_1 = \dot{u}, \quad y_1 = 0, \quad \dot{y}_1 = 0.$$

$$\text{masse } m_2 : \quad x_2 = u + l\sin\phi, \quad \dot{x}_2 = \dot{u} + l\dot{\phi}\cos\phi, \quad y_2 = l\cos\phi, \quad \dot{y}_2 = -l\dot{\phi}\sin\phi.$$

Énergie cinétique :

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{u}^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{u}^2 + \frac{m_2}{2} l^2\dot{\phi}^2 + m_2 l\dot{u}\dot{\phi}\cos\phi \tag{1}$$

Énergie potentielle :

$$V = -m_2 g y_2 = -m_2 g l\cos\phi \tag{2}$$

Lagrangien :

$$L(u, \phi, \dot{u}, \dot{\phi}) = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{u}^2 + \frac{m_2}{2} l^2\dot{\phi}^2 + m_2 l\dot{u}\dot{\phi}\cos\phi + m_2 g l\cos\phi \tag{3}$$

(b) Équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) = \frac{\partial L}{\partial u} \quad \Rightarrow \quad (m_1 + m_2)\ddot{u} + m_2 l\ddot{\phi}\cos\phi - m_2 l\dot{\phi}^2\sin\phi = 0 \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \phi} \quad \Rightarrow \quad l\ddot{\phi} + \ddot{u}\cos\phi + g\sin\phi = 0 \tag{5}$$

Constantes du mouvement :

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_u \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = (m_1 + m_2)\dot{u} + m_2 l\dot{\phi}\cos\phi \quad \text{est conservé.}$$

Cette quantité correspond à la composante horizontale de l'impulsion totale. L'origine de cette constante de mouvement est la symétrie translationnelle du système le long de x (théorème de Noether).

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{La fonction hamiltonienne } h(u, \phi, \dot{u}, \dot{\phi}) = \dot{u}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} + \dot{\phi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - L$$
$$= \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{u}^2 + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\phi}^2 + m_2 l\dot{u}\dot{\phi}\cos\phi - m_2 gl\cos\phi$$

est une constante de mouvement. Dans cet exercice (mais pas toujours), h correspond à l'énergie mécanique du système $h = E = T + V$.

(c) i) Expression de $u(t)$ en fonction de $\phi(t)$: l'intégration de $(m_1 + m_2)\dot{u} + m_2 l\dot{\phi}\cos\phi = C$ donne

$$u(t) = \frac{C}{m_1 + m_2}t - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\sin\phi(t) + D, \tag{6}$$

où les constantes $C = (m_1+m_2)v_0$ et $D = \frac{m_2 l}{m_1+m_2}\sin\alpha$ sont déterminées par les conditions initiales. On trouve donc :

$$u(t) = v_0 t - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\left[\sin\phi(t) - \sin\alpha\right]. \tag{7}$$

ii) Équation différentielle pour ϕ : en insérant (4) dans (5), on obtient :

$$\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cos^2\phi\right)l\ddot{\phi} + \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\dot{\phi}^2\sin\phi\cos\phi + g\sin\phi = 0. \tag{8}$$

Cette équation est difficile à résoudre exactement. Avant toute chose, notons que pour $m_1 \to \infty$ (masse 1 immobile), on retombe sur l'équation du pendule simple. On peut étudier ce qui se passe près du point d'équilibre $\phi = 0$ (la position de u peut être choisie arbitrairement via la symétrie sous translation du système), en supposant donc $\phi \ll 1$, auquel cas $\cos\phi \approx 1$, $\sin\phi \approx \phi$, d'où :

$$\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)l\ddot{\phi} + \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\dot{\phi}^2\phi + g\phi = 0. \tag{9}$$

Le deuxième terme continue à rendre le système difficile à résoudre. Si l'on se restreint de plus à des oscillations lentes, c'est-à-dire

$$\dot{\phi} \ll \sqrt{\frac{g}{l}\frac{m_1 + m_2}{m_2}}, \tag{10}$$

l'équation se réduit enfin à une forme moins effrayante :

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l}\frac{m_1 + m_2}{m_1}\phi. \tag{11}$$

À présent on peut la résoudre, et l'on obtient :

$$\phi(t) = \alpha\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}\frac{m_1 + m_2}{m_1}}\ t\right). \tag{12}$$

iii) En insérant (12) dans (7), et en tenant compte des approximations faites, on obtient :

$$u(t) = v_0 t - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \alpha \left[\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1}}\, t \right) - 1 \right]. \tag{13}$$

iv) Il reste à vérifier quand cette solution est valable. La première contrainte vient des petites oscillations :

$$\alpha \ll 1 \tag{14}$$

Ensuite, on doit également assurer des oscillations lentes, ce qui impose :

$$\alpha \sqrt{\frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1}} \ll \sqrt{\frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \ll \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \tag{15}$$

Il faut donc vérifier (14) et (15) pour que les approximations faites ci-dessus soient justifiées.